Шифр: 10-25

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по Математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Выборгский

Школа МБОУ „СОШ г. Светогорска"

Класс 10

ФИО Рассадников Григорий Сергеевич

Чистовик

10-25

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	0	0	21

10.1) Пример числа: 6571.

Проверим это число на принадлежность условию:

$6\cdot5\cdot7\cdot1\cdot(6+5+7+1)=30\cdot7\cdot19=210\cdot19=3990$, значит число 6571, подходит.

Ответ: 6571.

10.2) Предположим противное. Пусть множество A не содержит ни одного одного числа из B. В множестве A – n чисел и в множестве B – n чисел, всего 2n чисел. Если сложить числа из A и числа из B, то вместе получится сумма, равная $2n^2$.

Т.к множество A и B – различны, все числа из 2n – различны. то наименьшая сумма, которую можно получить при сложении и чисел из A и из B, это:

$$1+2+3+4+\ldots+2n-1+2n=\frac{2n(2n+1)}{2}=n(2n+1)=2n^2+n$$

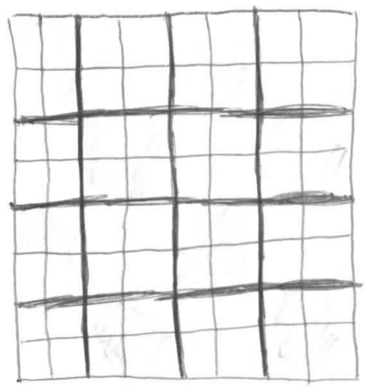
$2n^2+n>2n^2$ – противоречие.

При такой раскладе наименьшая возможная сумма при (натуральных числах) больше $2n^2$. Значит существует 2 одинаковых числа, причём эти 2 числа находятся в разных множествах, т.к. в множестве A ~~и B~~ – все числа различны и в множестве B – все числа различны (из условия), чтд.

Чистовик

10.3 Ответ: Дима. 10-25

Разобьём доску 8×8 на квадратики 2×2, как показано на рисунке. Всего 16 квадратов.



Первым ходом Катя ставит крестик в любую клетку и попадает в один из квадратов 2×2. Тогда Дима своим первым ходом должен поставить доминошку в соседней столбец в квадрате 2×2.

Например:

В последующие ходы, если Катя ставит крестик в квадрат, где ещё нет крестика, то Дима ставит домино в этот квадрат (рядом, в соседний столбец этого квадрата).

Если Катя ставит крестик в квадрат в котором уже есть крестик (и домино соответственно), то Дима покрывает домино оставшиеся 2 клетки данного квадрата.

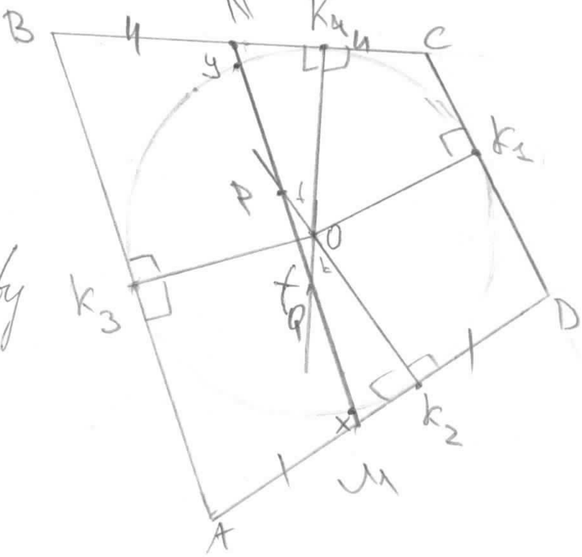
При такой стратегии Димы, Диме всегда есть, как ответить Кате. Поэтому последним ходом, Дима закроет все поле домино и Кате некуда будет поставить крестик.

Ответ: выигрышную стратегию имеет Дима

(Чистовик)

10.5

$\{ N$ — середина BC $BN = \frac{1}{2}BC$, O — центр окружности.
M — середина AD. $AM = \frac{1}{2}AD$
k_1, k_2, k_3, k_4 — точки касания.



$2BN + 2AM = AB + CD$, по св-ву вписанной окружности.

$\exists NM = x + y + f$

$$\begin{cases} Nk_4^2 = y\cdot(y+f) \\ Mk_2^2 = x\cdot(x+f) \end{cases}$$

$$(x-y)(\underbrace{x+y+f}_{MN}) = Nk_4^2 - Mk_2^2$$

$\exists Ok_2 = R$ и $Ok_4 = R$.

Продолжим k_2O и k_4O до точки пересечения с NM в точках P и Q соответственно.

По Т. Пифагора $\begin{matrix} Pk_2^2 = MP^2 - Mk_2^2 \\ Qk_4^2 = NQ^2 - Nk_4^2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} Pk_2^2 = MP^2 - (x)(x+f) \\ Qk_4^2 = NQ^2 - (y)(y+f) \end{matrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (PO+Ok_2)^2 = (MQ+PQ)^2 - x(x+f) \\ (QO+Ok_4)^2 = (NP+PQ)^2 - y(y+f) \\ PO+OQ \geq PQ - \text{из } \triangle PQO. \end{cases}$$

$$(PO+Ok_2)^2 - (QO+Ok_4)^2 = (MQ+PQ)^2 - (NP+PQ)^2 + y(y+f) - x(x+f)$$

$$(PO+Ok_2+QO+Ok_4)(PO+Ok_2-QO-Ok_4) = (\underbrace{MQ+2PQ+NP}_{MN+PQ})(\underbrace{MQ-NP}_{MN-PQ}) + \underbrace{(y-x)(x+y+f)}_{(y-x)MN}$$

~~$(MN+PQ)(MQ-NP)+(y-x)MN$~~

$$(MN+PO+OQ)(\underbrace{MQ+NP}_{MN-PQ}) + (y-x)MN \geq (PO+R+QO+R)(PO-OQ)$$

(Черновик)

$\cdot MN^2 - PQ^2 + (y-x)MN = (PO + 2R + QO)(PO - QO) = (PQ + 2R)(PO - Q$

$MN^2 - PQ + MNy - MNx > RQ \cdot PO - PQ \cdot OQ + 2R(PO - OQ)$

$MN(MN + y - x) > 2R$, тогда $2R < MN$, чтд.

диаметр $= 2R < MN$.

(10.4) Предположим противное, что

$py + 1 = (y + k')(y + t')$, где $1 < k' < p$, $1 < t' < p$.

Т.к. 2 послед. числа взаимнопросты, их НОД $= 1$, то $py + 1 \not\vdots p$ и $py + 1 \not\vdots y$.

Шифр: 2 - 10 - 03

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Выборгский

Школа МБОУ „СОШ г. Светогорска"

Класс 10

ФИО Рассадников Григорий Сергеевич

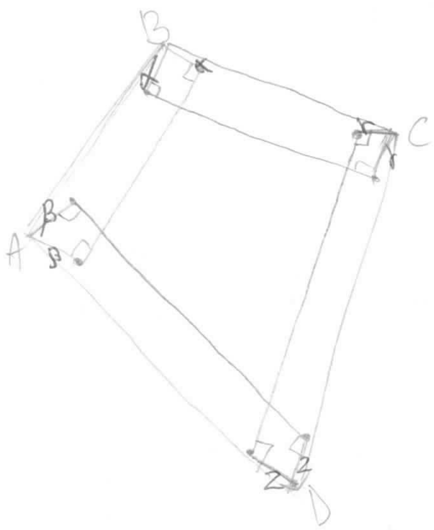
2-10-03

6	7	8	9	10	Σ
7	0	0	0	0	7

10.6) Умножим выражение на доске на $\cos x$, получим: $\cos^2 x$. Теперь добавим к этому выражению $\cos x$, получим: $\cos^2 x + \cos x$. Подставим π, : $\cos^2 \pi + \cos \pi = 1 - 1 = 0$.

Ответ: можно.

10.7)



$\angle ABC = \alpha + 90^\circ$

$\angle ADC = z + 90^\circ$

] $\alpha + 90^\circ + z + 90^\circ \neq 180^\circ$

$\alpha \neq z$

тогда, $\beta + 90^\circ = \gamma + 90^\circ$,

тогда $\beta = \gamma$.

значит, $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$

т.к. $\beta + \gamma + 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, т.к.

Тогда $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$.

Значит $ABCD$ - вписанный.

2 - 10 - 03

10.8) Пусть есть 3n подряд чисел, которые начинаются с k, где $k \in N$.

~~k~~, k+1, k+2, ..., k+3n-1, k+3n.

Тогда D какого-то выражения равен:

$$D = (k+t)^2 - 4(k+i)(k+j) = -3k^2 - 2k(2i+2j-t) + t^2 - 4ij$$

Т.к. k - const, а t, i, j - параметра, то коэфициент b должен быть $\geq 2k+t$, иначе $-3k^2$ - отрицательно и остальная часть < 0. ?

$$D = (2k+t) - 4(k+i)(k+j) = 4k(t+i-j) + t^2 - 4ij.$$

Докажем, что $t \geq i+j$.

Пусть это не верно, тогда: $t < i+j$

$t^2 < i^2 + 2ji + j^2$

$t^2 < ij + 2ji + ij$, как т. неравенство ($i \geq j$), без ограничен. общности.

$t^2 < 4ij$

$t^2 - 4ij < 0$

и

$4k(t-i-j) < 0$ неверно

Значит, $t \geq i+j$

сумма $i+j$ будет ~~то~~ один раз не меньше 200. $j=1$, то $i+j=201$ (или больше, если i больше), когда $i=200$, а но тогда число $201 \neq 201$. когда $t=201$, противоречие.

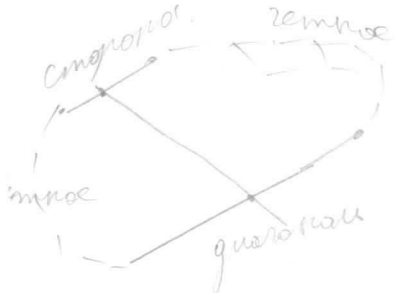
Случай, когда $t \neq 201$. и $i+j=201$ может не быть, ~~когда~~ но тогда либо все суммы $i+j$ будут одинаковы и будут равны 201, и мы найдем $t=201$. или при сложении 200 и $i \geq 1$. мы получим сумму 202, повторяя такие операции, мы получим, что $100+200=300$, что больше t.я.

ч.т.д.

Ответ: нет.

10.9) Пусть мог получится хороший многоугольник. тогда либо диагональ и сторона начального многоугольника параллельны либо две стороны.

Рассмотрим случай, когда сторона и диагональ параллельна.



Рассмотрим их центры. ~~тогд~~. Пусть они параллельны (диагональ и сторона), тогда относительно их центров, что справа, что слева должно быть одинаковое кол-во сторон. Иначе, мы не вернёмся в симметричную точку, ведь при повороте стороны угол не меняется т.к. многоугольник правильный.

~~Тогда сторон~~ четное кол-во. +2 - чётно, противоречие. ?

II. Рассмотрим случай, когда 2 стороны параллельны, тогда симметричная ей диагональ отсекает такой же многоугольник. Значит в начальном многоугольнике каждой стороне есть ~~пара~~ сторона параллельная ей.

1 || 2 и 4 || 3 и т.д....

Но ~~тогда, при отрезании~~ диагональю равных по кол-ву сторон многоугольника, мы будем получать четное кол-во сторон что противоречит.

при отрезании ~~равных~~ k-угольников мы будем брать k-1 сторону, тогда $n \vdots (k-1)$ и n - чётно и этих многоугольников либо чётно, или k-1 - нечётно, k - четно, что противоречит условию и ранним доказательствам.

Ответ: нет

(0,10) Зная значения t_1, t_2, t_3 и значения ax^2+bx+c от t_i можно узнать a, b, c. просто решив систему с 3 неизвестными. k_1, k_2, k_3 - значения $P(x)$

$$\begin{cases} at_1^2+bt_1+c=k_1 \\ at_2^2+bt_2+c=k_2 \\ at_3^2+bt_3^2+c=k_3 \end{cases}$$ – решаема.

Оценка: менее чем за 7 вопросов, Вася может узнать 6 точек и иметь выб. C_6^3 различных функций, ~~тогда~~

Седьмым ходом Вася должен назвать ещё одну точку (t_7), наибольшую или наименьшую из всех названных до этого. И посмотреть, как~~ой~~ из функций она принадлежит. Той, которой принадлежит эта точка, Вася и должен назвать (ту функцию).

Ответ: n = 7.